⋆ ⋆
Exercice 1

Calculer les développements limités suivants

1) DL à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{e}^{\sin x}$
2) DL à l'ordre 3 en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
3) DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$
4) DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x}$

⋆ ⋆
Exercice 2

Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^{1/x}+3^{1/x}-5^{1/x})^x$
2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

⋆
Exercice 3

Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1}(1-\cos(\frac{1}{n}))$
2) $\sum_{n\geq 1}(\mathrm{e}^{1/n}-\mathrm{e}^{1/(n+1)})$
3) $\sum_{n\geq 1}\ln\left(\dfrac{\cos(1/n)}{1-\sin(1/n)}\right)$
4) $\sum_{n\geq 1} n^{8/3}(\cos(1/n)-\mathrm{e}^{-1/(2n^2)})$

⋆
Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{e}^x-\sin(x)-x^2}{\ln(1+x)-x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle g ce prolongement.
4) Montrer que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.
5) Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe Γ de g et préciser les positions relatives de Γ et de T au voisinage de 0

⋆
Exercice 5

On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et préciser $f'(0)$.
3) Montrer que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

⋆
Exercice 6

1) Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x)=\sqrt{x^2-9x+8}$.
   Après avoir étudier l'ensemble de définition de f, déterminer deux asymptotes oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f.
2) Mêmes questions avec la fonction g définie par $g(x)=x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$.

⋆ ⋆
Exercice 7

Soit n un entier pair et soit $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$. Montrer que P n'a pas de racine multiple.

⋆
Exercice 8

Soit P un polynôme à coefficients réels.

1) Montrer que si λ est une racine complexe de P, alors $\overline{\lambda}$ est racine de P avec la même multiplicité que λ.
2) Supposons que toutes les racines réelles de P soient de multiplicité paire. Montrer que n est pair.

⋆
Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
2) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$
3) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$
4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^5}$
5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^u}{(1+\mathrm{e}^u)^2}\,\mathrm{d}u$
6) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$

⋆ ⋆
Exercice 10

(ENS 2021) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

1) Justifier que (u_n) est bien définie et étudier son sens de variations.
2) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\mathrm{e}} \leq v_n$ et $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3) En déduire la limite de la suite (u_n)
4) On cherche maintenant à obtenir un résultat plus précis.
   a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leq I$
   c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1) Donner l'ensemble D des réels pour lesquels cette intégrale a un sens.
2) Montrer que f est dérivable sur D et que sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. En déduire les variations de f.
3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Montrer que $f(x) - g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1, et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
4) On prolonge alors f par continuité en 1 (on note encore f ce prolongement). Étudier la dérivabilité de f en 1.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 12

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, et vérifiant $f \circ f = f$.
On note $a = \min\big\{f(x)\ ,\ x \in [0,1]\big\}$ et $b = \max\big\{f(x)\ ,\ x \in [0,1]\big\}$.

1) Justifier l'existence de a et de b.

2) Quelle est la restriction de f à $[a, b]$?
3) Quelles sont toutes les fonctions non constantes vérifiant toutes les hypothèses ci-dessus ? On pourra considérer les valeurs de $f'(a)$ et de $f'(b)$.
4) Quelles sont toutes les fonctions f continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $f \circ f = f$?

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 13

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2) Justifier que la restriction de f à $]0; +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-1/x}$$

4) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

⋆ ⋆

Exercice 14

(D'après ESCP 1994) Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x$$

1) Calculer u_0 et u_1.
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
3) a) Exprimer, pour tout $n \geq 1$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n.
   b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = n!\left(\mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$
4) Soit a un nombre réel et soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par les conditions :

$$v_0 = a \quad \text{et pour tout entier } n \geq 1, \quad v_n = n v_{n-1} - 1$$

Montrer que si $a \neq u_0$, la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est divergente.

5) a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

   b) En déduire qu'il existe deux constantes c_1 et c_2, que l'on déterminera, telles qu'on ait

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

⋆

Exercice 15

(ENS 2025)

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n = 2x+1$ d'inconnue x admet une unique solution positive. Cette solution est notée u_n.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est monotone, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 1$.
3) Montrer que $\ell = 1$.
4) On pose $\varepsilon_n = u_n - 1$ pour tout $n \geq 2$.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln(3+2\varepsilon_n)$.
   b) En déduire que $n\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(3)$.

⋆

Exercice 16

(ENS 2025)

Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$ et $x \geq 0$ on pose :

$$f_n(x) = x - \arctan(x) - n^\alpha$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ il existe un unique $x \geq 0$ tel que $f_n(x) = 0$, qu'on notera u_n dans la suite.
2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
3) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$
4) Démontrer que $n^\alpha(u_n - n^\alpha - \pi/2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.